



**Саровский физико-технический институт
Национального исследовательского ядерного университета МИФИ**

Рекуррентные соотношения

Алексеев В.В.

**Саров
2019**



Определение

- Соотношение, в котором для вычисления некоторого члена числовой последовательности используют значения предыдущих членов этой последовательности, называют **рекуррентным**.



Примеры:

- $f(n+2)=f(n)f(n+1)+5f^2(n+1)+3$ –
рекуррентное соотношение 2 -го порядка;
- $f(n+3)=7f(n)-3f(n+1)+4f(n+2)$ - рекуррентное
соотношение 3 -го порядка



Линейные рекуррентные соотношения с постоянными коэффициентами.

- Рекуррентные соотношения вида
$$f(n+k)=a_1f(n+k-1)+a_2f(n+k-2)+....+a_kf(n),$$
где $a_1, a_2, ...a_k$ - некоторые числа, называются линейными рекуррентными соотношениями с постоянными коэффициентами.



Определение

- Некоторая последовательность является решением данного рекуррентного соотношения, если при подстановке этой последовательности соотношение тождественно выполняется.
- **Например**, для рекуррентного соотношения $f(n+2)=3f(n+1)-2f(n)$ последовательность $2, 4, 8, \dots, 2^n, \dots$ является его решением.



- Решением рекуррентного соотношения k -того порядка называется общим, если оно зависит от k произвольных постоянных $C_1, C_2, \dots, C_k$ и значения которых определяются из начальных условий конкретного рекуррентного соотношения.

Например, для соотношения

$f(n+2)=5f(n+1)-6f(n)$ общим решением будет $C_1 2^n + C_2 3^n$.

Но любое решение данного соотношения однозначно определяется $f(1)$ и $f(2)$.



- Поэтому надо доказать, что для любых чисел a и b найдутся такие значения C_1 и C_2 , что $2C_1 + 3C_2 = a$ и $2^2C_1 + 3^2C_2 = b$,

но, как видно, при любых значениях a и b система

$$\begin{cases} 2C_1 + 3C_2 = a \\ 4C_1 + 9C_2 = b \end{cases}$$

имеет решение. Поэтому $C_1 2^n + C_2 3^n$ является общим решением соотношения

$$f(n+2) = 5f(n+1) - 6f(n)$$



Рассмотрим пример для $k=2$:

- $f(n+2)=a_1f(n+1)+a_2f(n)$ (1)
- Решение таких соотношений основано на утверждениях:
 - 1) Если $f_1(n)$ и $f_2(n)$ являются решениями рекуррентного соотношения (1), то при любых A и B последовательность $f(n)=Af_1(n)+Bf_2(n)$ также является решением этого соотношения.



Действительно:

$$f_1(n+2)=a_1f_1(n+1)+a_2f_1(n)$$

и
$$f_2(n+2)=a_1f_2(n+1)+a_2f_2(n).$$

Умножив эти равенства на A и B

соответственно и сложив, получаем:

$$A f_1(n+2)+B f_2(n+2)=a_1[Af_1(n+1)+Bf_2(n+1)]+ \\ +a_2[Af_1(n)+Bf_2(n)], \text{ а это}$$

и означает, что $f(n)=Af_1(n)+Bf_2(n)$ и

является решением соотношения (1).



2) Если число p_1 является корнем квадратного уравнения $p^2 = a_1 p + a_2$, то последовательность $1, p_1, p_1^2, \dots, p_1^n \dots$ является решением рекуррентного соотношения $f(n+2) = a_1 f(n+1) + a_2 f(n)$, т.е. любая последовательность вида p_1^{n+m} является решением этого соотношения.



Правило решения линейных рекуррентных соотношений 2-го порядка $f(n+2)=a_1f(n+1)+a_2f(n)$:

Составляется квадратное уравнение $p^2=a_1p+a_2$, которое называется **характеристическим уравнением** для данного соотношения.

Если это уравнения имеет два различных корня p_1 и p_2 , то общее решение рекуррентного соотношения имеет вид:

$$f(n)=C_1p_1^n + C_2p_2^n$$



- Если $f(0)=a$, $f(1)=b$. Тогда должно выполняться
$$\begin{cases} C_1 + C_2 = a \\ C_1 p_1 + C_2 p_2 = b \end{cases}$$
- Откуда получаем:

$$C_1 = \frac{b - ap_2}{p_1 - p_2} \qquad C_2 = \frac{ap_1 - b}{p_1 - p_2}$$



Числа Фибоначчи

- Получили рекуррентное соотношение

$$f_{n+2}=f_{n+1}+f_n; \quad \text{и } f_0=0, \quad f_1=1;$$

- Характеристическое уравнение имеет вид: $p^2=p+1$;

- Корни уравнения: $p_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad p_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

- Общее решение соотношения Фибоначчи имеет вид:

$$f(n) = C_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + C_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$$



Используя начальные условия, получаем:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = f_0 = 0 \\ C_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) + C_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) = f_1 = 1 \end{cases}$$

- Решая систему, находим: $C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $C_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$
- И окончательно получаем решение

(Формула
Бине)

$$f_n = \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n}{\sqrt{5}}$$



Случай $p_1 = p_2$

- В этом случае $C_1 p_1^n + C_2 p_2^n$ уже не будет общим решением.
- Если $p_1 = p_2 \Rightarrow f(n) = (C_1 + C_2) p_1^n = C_1 p_1^n$.
- Значение постоянной надо выбрать так, чтобы удовлетворить двум начальным условиям $f(0) = a$ и $f(1) = b$, что невозможно.
- Второе решение, отличное от $f_1(n) = p_1^n$ есть $f_2(n) = n p_1^n$.



Действительно:

- Имеем характеристическое уравнение
 $p^2 = a_1 p + a_2$.
- Если $p_1 = p_2$, то по теореме Виета
 $a_1 = 2p_1, \quad a_2 = -p_1^2$.
- Тогда уравнение можно записать так:
 $p^2 = 2p_1 p - p_1^2$.
- Тогда рекуррентное соотношение имеет вид:

$$f(n+2) = 2p_1 f(n+1) - p_1^2 f(n). \quad (*)$$



Проверим, что np_1^n действительно является его решением.

- Имеем $f_2(n+2)=(n+2)p_1^{n+2}$,
 $f_2(n+1)=(n+1)p_1^{n+1}$, $f_2(n)=np_1^n$.
- Подставляя эти значения в (*), получаем
 $(n+2)p_1^{n+2} = 2p_1(n+1)p_1^{n+1} - np_1^n$, т.е.
очевидное тождество.
- Значит, np_1^n есть решение рекуррентного соотношения $f(n+2)=a_1f(n+1)+a_2f(n)$ для случая, когда корни характеристического уравнения равны.



Итак, если корни равны, то будет два решения: $f_1(n)=p_1^n$ и $f_2(n)=np_1^n$.

- Общее решение запишется в виде:
- $f(n)=C_1p_1^n+nC_2p_1^n = p_1^n(C_1+nC_2)$.
- C_1 и C_2 определяются из начальных условий.



Линейные рекуррентные соотношения большего порядка.

- $f(n+k)=a_1f(n+k-1)+a_2f(n+k-2)+....+a_kf(n).$
- Составляем характеристическое уравнение

$$p^k=a_1p^{k-1}+a_2p^{k-2}+...+a_k.$$

- Если все корни $p_1, p_2, ... p_k$ различны, то

$$f(n)=C_1p_1^n+C_2p_2^n+...+C_kp_k^n = \sum_{i=1}^k C_i p_i^n$$



- Если имеется, например, m одинаковых корней $(p_1=p_2=\dots p_m)$, то
- $f_1(n)=p_1^n, f_2(n)=p_2^n, f_3(n)=p_3^n, \dots f_m(n)=p_m^n$
- В общем решении этому корню соответствует часть

$$p_1^n(C_1+nC_2+n^2C_3+\dots+n^{m-1}C_m).$$



Производящие функции

•



- Идея производящих функций достаточно проста: поставим в соответствие некоторой последовательности $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ - дискретному объекту, степенной ряд $a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n + \dots$ - объект непрерывный, тем самым мы подключаем к решению задачи целый арсенал средств математического анализа.



• *«Производящая функция является устройством, отчасти напоминающим мешок. Вместо того чтобы нести отдельно много предметов, что могло бы оказаться затруднительным, мы собираем их вместе, и тогда нам нужно нести лишь один предмет — мешок». Д.Пойа.*



- Абрахам де Муавр;
- Леонард Эйлер;
- Дьёрдь Пойа.



Задача Эйлера (50-е годы XVIII века)

- Какие грузы можно взвесить с помощью гирь весом $2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^n$ грамм и сколькими способами?
- При решении использовал **метод производящих функций**.



Определение

- Имеется некоторая числовая последовательность: $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ (1)
- Поставим ей в соответствие функцию

$$G(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (2)$$

которая называется **производящей** для последовательности (1).

- Коэффициент a_n является множителем при z^n и это обозначается как $[z^n]G(z) = a_n$



- Иногда ставят в соответствие функцию

$$G(z) = a_0 + a_1 \frac{z}{1!} + a_2 \frac{z^2}{2!} + \dots + a_n \frac{z^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!} \quad (3)$$

**которая называется экспоненциальной
производящей функцией для
последовательности (1).**



- Производящая функция имеет два представления: бесконечное и замкнутое.
- Как правило, для решения задачи необходимо бесконечный вид преобразовать в замкнутый;
- Замкнутый вид разложить в степенной ряд, и тем самым получить значения для коэффициентов a_k .



Пример.

- Имеется последовательность $1, 1, 1, \dots, 1..$
- В бесконечном представлении имеет вид: $1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^k + \dots;$
- В замкнутом виде $\frac{1}{1 - z}$



Решение задачи Эйлера

- Л.Эйлер рассматривает произведение:

$$G(z) = (1+z)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)\cdots$$

которое после раскрытия скобок
приводится к виду:

$$G(z) = 1 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3 + \cdots a_kz^k + \cdots$$

- Коэффициент a_k – есть число способов взвешивания груза в k грамм заданными гирями.



$$(1-z)G(z) = (1-z)(1+z)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)\cdots =$$

$$(1-z)G(z) = (1-z^2)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)\cdots =$$

$$(1-z)G(z) = (1-z^4)(1+z^4)(1+z^8)\cdots =$$

$$\dots\dots\dots =$$

$$(1-z)G(z) = 1$$

- Откуда получаем

$$G(z) = \frac{1}{1-z}$$



$$G(z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots a_k z^k + \cdots$$

$$G(z) = \frac{1}{1-z}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

$$a_1 = a_2 = a_3 \cdots = 1$$



Решение рекуррентных соотношений



Пример.

- Построить производящую функцию чисел Фибоначчи.
- Имеется рекуррентное соотношение:

$$f_{n+2}=f_{n+1}+f_n; \quad \text{и} \quad f_0=0, \quad f_1=1;$$

Умножив данное соотношение на z^n , где $n=0,1,2,3,....$ получим:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{n+2}z^n = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1}z^n + \sum_{n=0}^{\infty} f_nz^n \quad (*)$$

- Вполне очевидно, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_nz^n = f_0 + f_1z + f_2z^2 + \cdots + f_nz^n + \cdots = G(z)$$



Далее находим:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} z^n = f_1 + f_2 z + f_3 z^2 + \cdots f_{n+1} z^n + \cdots = \frac{G(z) - f_0}{z} = \frac{G(z)}{z}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+2} z^n &= f_2 + f_3 z + f_4 z^2 + \cdots f_{n+2} z^n + \cdots = \\ &= \frac{G(z) - f_0 - f_1 z}{z^2} = \frac{G(z) - z}{z^2} \end{aligned}$$



Подставляя в (*) получаем:

$$\frac{G(z) - z}{z^2} = \frac{G(z)}{z} + G(z)$$

- Отсюда искомая производящая функция для последовательности чисел Фибоначчи:

$$G(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}$$



Разложим ее на сумму простейших дробей

- Корни уравнения $1-z-z^2=0$ равны:

$$z_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \quad z_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2};$$

- Тогда

$$G(z) = \frac{z}{1-z-z^2} = \frac{a}{z_1 - z} + \frac{b}{z_2 - z}$$



Находим значения
коэффициентов a и b

$$z = a(z_2 - z) + b(z_1 - z)$$

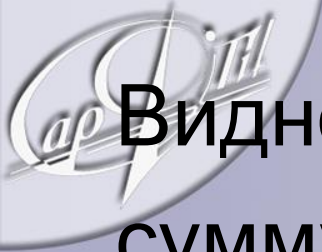
- Подставляя значения $z=z_1$ и $z=z_2$ находим:

$$a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, \quad b = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$



Преобразуем $G(z)$:

$$G(z) = \frac{z}{1 - z - z^2} = \frac{a}{z_1 - z} + \frac{b}{z_2 - z} =$$
$$\frac{a}{z_1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{z_1}} + \frac{b}{z_2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{z_2}}.$$



Видно, что каждая из дробей представляет сумму геометрической прогрессии.

- По формуле

$$\frac{1}{1 - \alpha z} = 1 + (\alpha z) + (\alpha z)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^n$$

находим

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right] z^n$$



Но мы изначально определили,

что $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$

- Отсюда делаем вывод, что

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$



Алгоритм решения рекуррентных уравнений с использованием производящих функций:

- Запишите уравнение, выражающее a_n через другие элементы последовательности;
- Умножьте обе части уравнения на z^n и просуммируйте по всем n . В левой части получится сумма $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, которая равна производящей функции $G(z)$. Правую часть надо преобразовать так, чтобы она включала $G(z)$.



- Решите полученное уравнение, получив для $G(z)$ выражение в замкнутом виде.
- Разложите $G(z)$ в степенной ряд и определите коэффициент при z^n , это и будет замкнутый вид для a_n .



Для последовательности чисел Фибоначчи:

$$f_0 = 0;$$

$$f_1 = 1;$$

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 2$$

- Умножим каждую строку на $z^0, z^1, \dots, z^n$
соответственно:

$$z^0 \cdot f_0 = 0;$$

$$z^1 \cdot f_1 = z;$$

$$z^n \cdot f_n = z^n \cdot f_{n-1} + z^n \cdot f_{n-2}, \quad n \geq 2.$$



Просуммируем полученные равенства:

$$f_0 + zf_1 + \sum_{n=2}^{\infty} f_n z^n = z + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1} z^n + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2} z^n$$

- Обозначим левую часть

$$G(z) = f_0 + zf_1 + \sum_{n=2}^{\infty} f_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$$

- Слагаемые в правой части:

$$\sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1} z^n = z \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1} z^{n-1} = zG(z);$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2} z^n = z^2 \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2} z^{n-2} = z^2 G(z).$$



Теперь имеем уравнение

$$G(z) = z + zG(z) + z^2G(z)$$

- решая которое относительно $G(z)$ и находим производящую функцию для последовательности чисел Фибоначчи:

$$G(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}$$



Пример.

- Пусть имеется последовательность чисел 1, 7, 19, 43, 91, 187, 379, ... которой удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$a_0 = 1;$$

$$a_n = 2a_{n-1} + 5, \quad n \geq 1.$$

- Необходимо найти общую формулу для a_n .



- Производящую функцию будем искать в виде:

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

- Умножив левую и правую части соотношения на z в соответствующей степени:

$$z^0 a_0 = 1a_0 = 1;$$

$$z^n a_n = (2a_{n-1} + 5)z^n, \quad n \geq 1.$$



- Сложим полученные равенства по всем n :

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2a_{n-1} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} 5z^n. \quad (*)$$

- Преобразуем правую и левую части:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = G(z);$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2a_{n-1} z^n = 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} z^n = 2z \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 2zG(z);$$



$$\sum_{n=1}^{\infty} 5z^n = 5 \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} = 5z \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{5z}{1-z}.$$

- Подставив полученные выражения в (*) получаем выражение:

$$G(z) = 1 + 2zG(z) + \frac{5z}{1-z};$$

- Из которого следует выражение для производящей функции заданного рекуррентного соотношения:

$$G(z) = \frac{1+4z}{(1-z)(1-2z)}.$$



$$G(z) = \frac{1+4z}{(1-z)(1-2z)} = \frac{A}{1-z} + \frac{B}{1-2z}$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -2A-B=4 \end{cases}$$

- Решая, находим: $A=-5$, $B=6$.
- И тогда

$$G(z) = \frac{1+4z}{(1-z)(1-2z)} = \frac{6}{1-2z} - \frac{5}{1-z}$$

- Отсюда получаем:



$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (6 \cdot 2^n - 5)z^n.$$

- T.e.

$$a_n = [z^n]G(z) = 6 \cdot 2^n - 5.$$



Построить производящую функцию
для последовательности $C_n^0, C_n^1, \dots, C_n^n$

- Для решения воспользуемся известным соотношением:

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

- Умножив правую и левую части на z^k и выполнив сложение по всем k , получаем:

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_n^k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} C_{n-1}^k z^k + \sum_{k=0}^{\infty} C_{n-1}^{k-1} z^k \quad (**)$$



Учитывая свойство сочетания C_n^k

имеем: $\sum_{k=0}^{\infty} C_n^k z^k = \sum_{k=0}^n C_n^k z^k = f_n(z) = G(z)$,

где $G(z)$ – искомая производящая функция.

Далее для $f_{n-1}(z)$ имеем:

$$\sum_{k=0}^n C_{n-1}^k z^k = f_{n-1}(z)$$

и

$$\sum_{k=0}^n C_{n-1}^{k-1} z^k = z \sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^{k-1} z^{k-1} = z f_{n-1}(z).$$



Подставляя полученные
выражения в (***) получаем:

$$G(z) = f_{n-1}(z) + zf_{n-1}(z) = (1+z)f_{n-1}(z);$$

$$f_{n-1}(z) = (1+z)f_{n-2}(z);$$

Тогда $G(z) = (1+z)^2 f_{n-2}(z);$

Но $f_{n-2} = (1+z)f_{n-3}(z)$



И повторяя процедуру n раз
(до f_0) окончательно получаем:

$$G(z) = (1+z)^n f_0(z).$$

Так как $f_0(z) = C_0^0 = 1$, то окончательно
получаем производящую функцию

$$G(z) = (1+z)^n.$$

Т.е., получили известное соотношение –
Бином Ньютона

$$\sum_{k=0}^n C_n^k z^k = (1+z)^n$$



Преобразование производящих функций

- **Производящая функция**

последовательности $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$
есть формальный степенной ряд

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

- Коэффициент a_n при z^n в разложении G по степеням z

$$[z^n]G(z) = a_n$$



1.Сдвиг

$$z^m G(z) = z^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 z^m + a_1 z^{m+1} + a_2 z^{m+2} + \dots$$

Данная функция генерирует новую последовательность: $\underbrace{0, 0, 0, \dots, 0}_m, a_0, a_1, a_2, \dots,$

которая является сдвигом исходной последовательности на m элементов вправо:

$$[z^n] \left(z^m (G(z)) \right) = a_{n-m}.$$



В обратную сторону происходит процесс деления:

$$\frac{G(z) - a_0 - a_1 z - a_2 z^2 - \dots - a_{m-1} z^{m-1}}{z^m} =$$

$$a_m + a_{m+1} z + a_{m+2} z^2 + \dots$$

T.e.

$$[z^n] \left(\frac{G(z) - a_0 - a_1 z - a_2 z^2 - \dots - a_{m-1} z^{m-1}}{z^m} \right) = a_{n+m}$$



2. Полиномиальный множитель и делитель

- Последовательность вида (na_n) .
- Получается путем дифференцирования $G(z)$ с последующим умножением результата на z :

$$zG'(z) = z \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right)' = z \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^n$$

- Таким образом

$$[z^n](G'(z)) = n a_n.$$



Интегрирование функции $\frac{G(z) - a_0}{z}$

Поделит общий член последовательности на n :

$$\int_0^z \frac{G(t) - a_0}{t} dt = \int_0^z \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^{n-1} \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} z^n.$$

$$[z^n] \left(\int_0^z \frac{G(t) - a_0}{t} dt \right) = \frac{a_n}{n}, \quad n \geq 1.$$



3. Сложение. Умножение на константу

- Имеем две производящие функции:

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots,$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \dots,$$

$$G(z) + H(z) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)z + (a_2 + b_2)z^2 + \dots =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$$



Умножение на постоянный множитель:

$$\alpha G(z) = \alpha a_0 + \alpha a_1 z + \alpha a_2 z^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha a_n z^n$$

- z также можно умножить на постоянное число

$$G(kz) = a_0 + a_1 kz + a_2 (kz)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} k^n a_n z^n.$$

$$[z^n](G(z) + H(z)) = a_n + b_n;$$

$$[z^n](\alpha G(z)) = \alpha a_n;$$

$$[z^n](G(kz)) = k^n a_n.$$



4. Свёртка

- Перемножим производящие функции

$$F(z) = G(z) \cdot H(z) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)z + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)z^2 + \dots \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n.$$

- Сумму, взятую в скобки называют сверткой c_n .

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$



- Произведение производящих функций, генерирующих последовательности a_n и b_n , генерирует свертку c_n .

Пусть $b_n = 1$, тогда

$$F(z) = \frac{1}{1-z} G(z) = a_0 + (a_0 + a_1)z + (a_0 + a_1 + a_2)z^2 + \dots$$
$$+ \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k \right) z^n.$$

Т.е. функция $\frac{G(z)}{1-z}$ генерирует последовательность частичных сумм исходной последовательности a_n .



Тогда:

$$G(z) = 1 \Leftrightarrow 1, 0, 0, 0, \dots$$

$$G(z) = \frac{1}{1-z} \Leftrightarrow 1, 1, 1, 1, \dots = (1)_{n \geq 0}$$

$$G(z) = \frac{1}{(1-z)^2} \Leftrightarrow 1, 2, 3, 4, 5, \dots = (n+1)_{n \geq 0}$$

$$G(z) = \frac{1}{(1-z)^3} \Leftrightarrow 1, 3, 6, 10, 15, \dots = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)_{n \geq 0}$$

$$G(z) = \frac{1}{(1-z)^4} \Leftrightarrow 1, 4, 10, 20, \dots = \left(\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} \right)_{n \geq 0}$$



Производящие функции



- Идея производящих функций достаточно проста: поставим в соответствие некоторой последовательности $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ - дискретному объекту, степенной ряд $a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n + \dots$ - объект непрерывный, тем самым мы подключаем к решению задачи целый арсенал средств математического анализа.



- *«Производящая функция является устройством, отчасти напоминающим мешок. Вместо того чтобы нести отдельно много предметов, что могло бы оказаться затруднительным, мы собираем их вместе, и тогда нам нужно нести лишь один предмет — мешок». Д.Пойа.*



- Абрахам де Муавр;
- Леонард Эйлер;
- Дьёрдь Пойа.



Задача Эйлера (50-е годы XVIII века)

- Какие грузы можно взвесить с помощью гирь весом $2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^n$ грамм и сколькими способами?
- При решении использовал **метод производящих функций**.



Определение

- Имеется некоторая числовая последовательность: $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ (1)
- Поставим ей в соответствие функцию

$$G(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (2)$$

которая называется **производящей** для последовательности (1).

- Коэффициент a_n является множителем при z^n и это обозначается как $[z^n]G(z) = a_n$



- Иногда ставят в соответствие функцию

$$G(z) = a_0 + a_1 \frac{z}{1!} + a_2 \frac{z^2}{2!} + \dots + a_n \frac{z^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!} \quad (3)$$

**которая называется экспоненциальной
производящей функцией для
последовательности (1).**



- Производящая функция имеет два представления: бесконечное и замкнутое.
- Как правило, для решения задачи необходимо бесконечный вид преобразовать в замкнутый;
- Замкнутый вид разложить в степенной ряд, и тем самым получить значения для коэффициентов a_k .



Пример.

- Имеется последовательность $1, 1, 1, \dots, 1..$
- В бесконечном представлении имеет вид: $1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^k + \dots;$
- В замкнутом виде $\frac{1}{1 - z}$



Решение задачи Эйлера

- Л.Эйлер рассматривает произведение:

$$G(z) = (1 + z)(1 + z^2)(1 + z^4)(1 + z^8) \cdots$$

которое после раскрытия скобок
приводится к виду:

$$G(z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots a_k z^k + \cdots$$

- Коэффициент a_k – есть число способов взвешивания груза в k грамм заданными гирями.



$$(1-z)G(z) = (1-z)(1+z)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)\cdots =$$

$$(1-z)G(z) = (1-z^2)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)\cdots =$$

$$(1-z)G(z) = (1-z^4)(1+z^4)(1+z^8)\cdots =$$

$$\dots\dots\dots =$$

$$(1-z)G(z) = 1$$

- Откуда получаем

$$G(z) = \frac{1}{1-z}$$



$$G(z) = 1 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots a_k z^k + \cdots$$

$$G(z) = \frac{1}{1-z}$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

$$a_1 = a_2 = a_3 \cdots = 1$$



Решение рекуррентных соотношений



Пример.

- Построить производящую функцию чисел Фибоначчи.
- Имеется рекуррентное соотношение:

$$f_{n+2}=f_{n+1}+f_n; \quad \text{и} \quad f_0=0, \quad f_1=1;$$

Умножив данное соотношение на z^n , где $n=0,1,2,3,....$ получим:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{n+2}z^n = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1}z^n + \sum_{n=0}^{\infty} f_nz^n \quad (*)$$

- Вполне очевидно, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_nz^n = f_0 + f_1z + f_2z^2 + \cdots + f_nz^n + \cdots = G(z)$$



Далее находим:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_{n+1} z^n = f_1 + f_2 z + f_3 z^2 + \cdots f_{n+1} z^n + \cdots = \frac{G(z) - f_0}{z} = \frac{G(z)}{z}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} f_{n+2} z^n &= f_2 + f_3 z + f_4 z^2 + \cdots f_{n+2} z^n + \cdots = \\ &= \frac{G(z) - f_0 - f_1 z}{z^2} = \frac{G(z) - z}{z^2} \end{aligned}$$

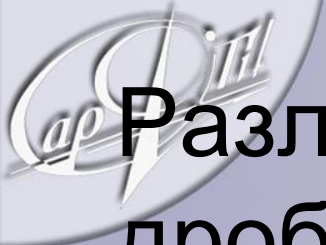


Подставляя в (*) получаем:

$$\frac{G(z) - z}{z^2} = \frac{G(z)}{z} + G(z)$$

- Отсюда искомая производящая функция для последовательности чисел Фибоначчи:

$$G(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}$$



Разложим ее на сумму простейших дробей

- Корни уравнения $1-z-z^2=0$ равны:

$$z_1 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \quad z_2 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2};$$

- Тогда

$$G(z) = \frac{z}{1 - z - z^2} = \frac{a}{z_1 - z} + \frac{b}{z_2 - z}$$



Находим значения
коэффициентов a и b

$$z = a(z_2 - z) + b(z_1 - z)$$

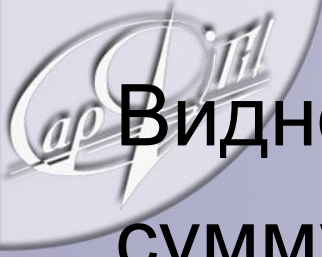
- Подставляя значения $z=z_1$ и $z=z_2$ находим:

$$a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, \quad b = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$



Преобразуем $G(z)$:

$$G(z) = \frac{z}{1 - z - z^2} = \frac{a}{z_1 - z} + \frac{b}{z_2 - z} =$$
$$\frac{a}{z_1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{z_1}} + \frac{b}{z_2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{z_2}}.$$



Видно, что каждая из дробей представляет сумму геометрической прогрессии.

- По формуле

$$\frac{1}{1 - \alpha z} = 1 + (\alpha z) + (\alpha z)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^n$$

находим

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right] z^n$$



Но мы изначально определили,

что $G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$

- Отсюда делаем вывод, что

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$



Алгоритм решения рекуррентных уравнений с использованием производящих функций:

- Запишите уравнение, выражающее a_n через другие элементы последовательности;
- Умножьте обе части уравнения на z^n и просуммируйте по всем n . В левой части получится сумма $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, которая равна производящей функции $G(z)$. Правую часть надо преобразовать так, чтобы она включала $G(z)$.



- Решите полученное уравнение, получив для $G(z)$ выражение в замкнутом виде.
- Разложите $G(z)$ в степенной ряд и определите коэффициент при z^n , это и будет замкнутый вид для a_n .



Для последовательности чисел Фибоначчи:

$$f_0 = 0;$$

$$f_1 = 1;$$

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, \quad n \geq 2$$

- Умножим каждую строку на $z^0, z^1, \dots, z^n$
соответственно:

$$z^0 \cdot f_0 = 0;$$

$$z^1 \cdot f_1 = z;$$

$$z^n \cdot f_n = z^n \cdot f_{n-1} + z^n \cdot f_{n-2}, \quad n \geq 2.$$



Просуммируем полученные равенства:

$$f_0 + zf_1 + \sum_{n=2}^{\infty} f_n z^n = z + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1} z^n + \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2} z^n$$

- Обозначим левую часть

$$G(z) = f_0 + zf_1 + \sum_{n=2}^{\infty} f_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$$

- Слагаемые в правой части:

$$\sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1} z^n = z \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-1} z^{n-1} = zG(z);$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2} z^n = z^2 \sum_{n=2}^{\infty} f_{n-2} z^{n-2} = z^2 G(z).$$



Теперь имеем уравнение

$$G(z) = z + zG(z) + z^2G(z)$$

- решая которое относительно $G(z)$ и находим производящую функцию для последовательности чисел Фибоначчи:

$$G(z) = \frac{z}{1 - z - z^2}$$



Пример.

- Пусть имеется последовательность чисел 1, 7, 19, 43, 91, 187, 379, ... которой удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$a_0 = 1;$$

$$a_n = 2a_{n-1} + 5, \quad n \geq 1.$$

- Необходимо найти общую формулу для a_n .



- Производящую функцию будем искать в виде:

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

- Умножив левую и правую части соотношения на z в соответствующей степени:

$$z^0 a_0 = 1a_0 = 1;$$

$$z^n a_n = (2a_{n-1} + 5)z^n, \quad n \geq 1.$$



- Сложим полученные равенства по всем n :

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2a_{n-1} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} 5z^n. \quad (*)$$

- Преобразуем правую и левую части:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = G(z);$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2a_{n-1} z^n = 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} z^n = 2z \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 2zG(z);$$



$$\sum_{n=1}^{\infty} 5z^n = 5 \sum_{n=0}^{\infty} z^{n+1} = 5z \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{5z}{1-z}.$$

- Подставив полученные выражения в (*) получаем выражение:

$$G(z) = 1 + 2zG(z) + \frac{5z}{1-z};$$

- Из которого следует выражение для производящей функции заданного рекуррентного соотношения:

$$G(z) = \frac{1+4z}{(1-z)(1-2z)}.$$



$$G(z) = \frac{1+4z}{(1-z)(1-2z)} = \frac{A}{1-z} + \frac{B}{1-2z}$$

$$\begin{cases} A+B=1 \\ -2A-B=4 \end{cases}$$

- Решая, находим: $A=-5$, $B=6$.
- И тогда

$$G(z) = \frac{1+4z}{(1-z)(1-2z)} = \frac{6}{1-2z} - \frac{5}{1-z}$$

- Отсюда получаем:



$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (6 \cdot 2^n - 5)z^n.$$

- T.e.

$$a_n = [z^n]G(z) = 6 \cdot 2^n - 5.$$



Построить производящую функцию
для последовательности $C_n^0, C_n^1, \dots, C_n^n$

- Для решения воспользуемся известным соотношением:

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$$

- Умножив правую и левую части на z^k и выполнив сложение по всем k , получаем:

$$\sum_{k=0}^{\infty} C_n^k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} C_{n-1}^k z^k + \sum_{k=0}^{\infty} C_{n-1}^{k-1} z^k \quad (**)$$



Учитывая свойство сочетания C_n^k

имеем: $\sum_{k=0}^{\infty} C_n^k z^k = \sum_{k=0}^n C_n^k z^k = f_n(z) = G(z)$,

где $G(z)$ – искомая производящая функция.

Далее для $f_{n-1}(z)$ имеем:

$$\sum_{k=0}^n C_{n-1}^k z^k = f_{n-1}(z)$$

и

$$\sum_{k=0}^n C_{n-1}^{k-1} z^k = z \sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^{k-1} z^{k-1} = z f_{n-1}(z).$$



Подставляя полученные
выражения в (***) получаем:

$$G(z) = f_{n-1}(z) + zf_{n-1}(z) = (1+z)f_{n-1}(z);$$

$$f_{n-1}(z) = (1+z)f_{n-2}(z);$$

Тогда $G(z) = (1+z)^2 f_{n-2}(z);$

Но $f_{n-2} = (1+z)f_{n-3}(z)$



И повторяя процедуру n раз
(до f_0) окончательно получаем:

$$G(z) = (1+z)^n f_0(z).$$

Так как $f_0(z) = C_0^0 = 1$, то окончательно
получаем производящую функцию

$$G(z) = (1+z)^n.$$

Т.е., получили известное соотношение –
Бином Ньютона

$$\sum_{k=0}^n C_n^k z^k = (1+z)^n$$



Преобразование производящих функций

- **Производящая функция**

последовательности $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$
есть формальный степенной ряд

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$$

- Коэффициент a_n при z^n в разложении G по степеням z

$$[z^n]G(z) = a_n$$



1.Сдвиг

$$z^m G(z) = z^m \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 z^m + a_1 z^{m+1} + a_2 z^{m+2} + \dots$$

Данная функция генерирует новую последовательность: $\underbrace{0, 0, 0, \dots, 0}_m, a_0, a_1, a_2, \dots$,

которая является сдвигом исходной последовательности на m элементов вправо:

$$[z^n] \left(z^m (G(z)) \right) = a_{n-m}.$$



В обратную сторону происходит процесс деления:

$$\frac{G(z) - a_0 - a_1 z - a_2 z^2 - \dots - a_{m-1} z^{m-1}}{z^m} =$$

$$a_m + a_{m+1} z + a_{m+2} z^2 + \dots$$

T.e.

$$[z^n] \left(\frac{G(z) - a_0 - a_1 z - a_2 z^2 - \dots - a_{m-1} z^{m-1}}{z^m} \right) = a_{n+m}$$



2. Полиномиальный множитель и делитель

- Последовательность вида (na_n) .
- Получается путем дифференцирования $G(z)$ с последующим умножением результата на z :

$$zG'(z) = z \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right)' = z \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^n$$

- Таким образом

$$[z^n](G'(z)) = n a_n.$$



Интегрирование функции $\frac{G(z) - a_0}{z}$

Поделит общий член последовательности на n :

$$\int_0^z \frac{G(t) - a_0}{t} dt = \int_0^z \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n t^{n-1} \right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} z^n.$$

$$[z^n] \left(\int_0^z \frac{G(t) - a_0}{t} dt \right) = \frac{a_n}{n}, \quad n \geq 1.$$



3. Сложение. Умножение на константу

- Имеем две производящие функции:

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots,$$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \dots,$$

$$G(z) + H(z) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)z + (a_2 + b_2)z^2 + \dots =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$$



Умножение на постоянный множитель:

$$\alpha G(z) = \alpha a_0 + \alpha a_1 z + \alpha a_2 z^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha a_n z^n$$

- z также можно умножить на постоянное число

$$G(kz) = a_0 + a_1 kz + a_2 (kz)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} k^n a_n z^n.$$

$$[z^n](G(z) + H(z)) = a_n + b_n;$$

$$[z^n](\alpha G(z)) = \alpha a_n;$$

$$[z^n](G(kz)) = k^n a_n.$$



4. Свёртка

- Перемножим производящие функции

$$F(z) = G(z) \cdot H(z) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)z + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)z^2 + \dots \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n.$$

- Сумму, взятую в скобки называют сверткой c_n .

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$



- Произведение производящих функций, генерирующих последовательности a_n и b_n , генерирует свертку c_n .

Пусть $b_n = 1$, тогда

$$F(z) = \frac{1}{1-z} G(z) = a_0 + (a_0 + a_1)z + (a_0 + a_1 + a_2)z^2 + \dots$$
$$+ \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k \right) z^n.$$

Т.е. функция $\frac{G(z)}{1-z}$ генерирует последовательность частичных сумм исходной последовательности a_n .



Тогда:

$$G(z) = 1 \Leftrightarrow 1, 0, 0, 0, \dots$$

$$G(z) = \frac{1}{1-z} \Leftrightarrow 1, 1, 1, 1, \dots = (1)_{n \geq 0}$$

$$G(z) = \frac{1}{(1-z)^2} \Leftrightarrow 1, 2, 3, 4, 5, \dots = (n+1)_{n \geq 0}$$

$$G(z) = \frac{1}{(1-z)^3} \Leftrightarrow 1, 3, 6, 10, 15, \dots = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)_{n \geq 0}$$

$$G(z) = \frac{1}{(1-z)^4} \Leftrightarrow 1, 4, 10, 20, \dots = \left(\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} \right)_{n \geq 0}$$



Решение линейных неоднородных рекуррентных соотношений



Задано линейное неоднородное рекуррентное соотношение

$$a_{n+k} + p_1 a_{n+k-1} + p_2 a_{n+k-2} + \dots + p_k a_n = f(n) \quad (1)$$

Пусть $\{b_n\}$ – общее решение соответствующего однородного уравнения, а $\{c_n\}$ – какое–нибудь частное решение неоднородного уравнения (1). Тогда последовательность $\{b_n + c_n\}$ образует общее решение уравнения (1), и, таким образом, справедлива следующая теорема



Теорема 1

- *Общее решение неоднородного линейного рекуррентного уравнения представляется в виде суммы общего решения соответствующего однородного линейного рекуррентного уравнения и некоторого частного решения неоднородного уравнения*
- Следовательно, задача решения неоднородного уравнения сводится к нахождению некоторого частного решения.



Если в формуле (1) $f(n) = \beta^n$, где β^n не является корнем характеристического уравнения для (1), то подставляя

$$a_n = c \cdot \beta^n \text{ в уравнение (1) получаем}$$
$$c \cdot (\beta^k + p_1 \beta^{k-1} + p_2 \beta^{k-2} + \dots + p_k) \beta^n =$$
$$= \beta^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{Откуда } c \cdot P_a(\beta) = 1 \quad \text{и тогда } c = \frac{1}{P_a(\beta)}$$



а частное решение можно задать формулой

$$a_n = \frac{\beta^n}{P_a(\beta)}$$



Теорема 2

Если в неоднородном уравнении (1)

$$f(n) = \beta^n$$

*где β не является корнем
характеристического уравнения
соответствующего линейного
рекуррентного соотношения, т.е. $P_a(\beta) \neq 0$,
то частное решение этого уравнения
можно задать формулой*

$$a_n = \frac{\beta^n}{P_a(\beta)}$$



Теорема 3

Если в неоднородном уравнении (1) $f(n)$ есть многочлен степени r от переменной n и число 1 не является корнем характеристического уравнения, то частное решение этого уравнения следует искать в виде

$$a_n = \sum_{i=0}^r d_i n^i, \quad (3)$$

где d_i ($i=0, 1, 2, \dots$), r —неопределенные коэффициенты.



Доказательство.

Подставляя решение (3) в уравнение (1), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^r d_i (n+k)^i + p_1 \sum_{i=0}^r d_i (n+k-1)^i + \dots + p_k \sum_{i=0}^r d_i n^i &= \\ &= \sum_{i=0}^r d_i \left((n+k)^i + p_1 (n+k-1)^i + \dots + p_k n^i \right) = \\ &= \sum_{i=0}^r d_i (g_1 n^i + \dots) = f(n) \end{aligned}$$



Сравнивая коэффициенты в левой и правой частях последнего равенства, получаем соотношения для определения значений d_i .



Пример

Найти частное решение уравнения

$$a_{n+1} = 3a_n + 2n + 1 \text{ при } a_0 = 1 \quad (*)$$

Решение.

Характеристический многочлен уравнения (*) имеет вид $P_a(x) = x - 3$

Так как $P_a(1) = -2 \neq 0$ и $f(n) = 2n + 1$, то согласно теореме 3 частное решение (*) будем искать в виде

$$c_n = d_0 + d_1 n$$



Подставляя c_n в уравнение (*)
получаем

$$d_0 + d_1(n + 1) = 3(d_0 + d_1n) + 2n + 1$$

Или в виде

$$d_0 + d_1(n + 1) - 3(d_0 + d_1n) = 2n + 1$$

Преобразовав, получаем

$$-2d_0 + d_1 - 2d_1n = 2n + 1$$

Приравнивая коэффициенты при
одинаковых степенях n в левой и правой
частях последнего равенства, получаем
систему уравнений



$$\begin{cases} -2d_0 + d_1 = 1 \\ -2d_1 = n \end{cases}$$

Решая которую, получаем: $d_0 = -1$, $d_1 = -1$.

Таким образом, частное решение уравнений (*) имеет вид $C_n = -1 - n$.

Общее решение соответствующего однородного уравнения для (*) будет

$$b_n = C \cdot 3^n.$$



Тогда согласно теореме 1 общее решение уравнения (*) имеет вид

$$a_n = C \cdot 3^n - n - 1.$$

Исходя из начальных условий, находим коэффициент C

$$a_0 = C \cdot 3^0 - 0 - 1 = C - 1 = 1,$$

откуда получаем $C=2$. И окончательно получаем решение:

$$a_n = 2 \cdot 3^n - n - 1$$

